

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \lambda \hat{W} \quad \lambda \ll 1$$

$$\hat{H}_0 |\phi_n\rangle = E_n^0 |\phi_n\rangle$$

$$E_n(\lambda) = E_0^{(n)} + E_1^{(n)} \lambda + E_2^{(n)} \lambda^2 + \dots$$

$$|\psi_n(\lambda)\rangle = |\alpha_0^{(n)}\rangle + \lambda |\alpha_1^{(n)}\rangle + \lambda^2 |\alpha_2^{(n)}\rangle + \dots$$

$$E_n(\lambda) = E_0^n + \langle \phi_n | \lambda \hat{W} | \phi_n \rangle$$

$$|\psi_n(\lambda)\rangle = |\phi_n\rangle + \sum_{p \neq n} \frac{\langle \phi_p | \lambda \hat{W} | \phi_n \rangle}{E_n^0 - E_p^0} |\phi_p\rangle$$

← corregir signo de clase pasada.

$$\lambda^0: H_0 |\alpha_0^{(n)}\rangle = E_0^{(n)} |\alpha_0^{(n)}\rangle$$

$$\lambda^1: (H_0 - E_0^{(n)}) |\alpha_1^{(n)}\rangle + (W - E_1^{(n)}) |\alpha_0^{(n)}\rangle = 0$$

$$\lambda^2: (H_0 - E_0^{(n)}) |\alpha_2^{(n)}\rangle + (\hat{W} - E_1^{(n)}) |\alpha_1^{(n)}\rangle - E_2^{(n)} |\alpha_0^{(n)}\rangle = 0$$

$$|\alpha_i^{(n)}\rangle = \sum_p \langle \phi_p | \alpha_i^{(n)} \rangle |\phi_p\rangle$$

$$\langle \phi_p | \alpha_i^{(n)} \rangle = \frac{\langle \phi_p | W | \phi_n \rangle}{E_n^0 - E_p^0} \quad n \neq p$$

Nos faltó ver que $\langle \phi_n | \alpha_i^{(n)} \rangle = 0$

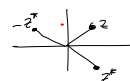
$$\langle \phi_n | \alpha_i^{(n)} \rangle = \langle \alpha_0^{(n)} | \alpha_i^{(n)} \rangle$$

$$1 = \langle \psi_n(\lambda) | \psi_n(\lambda) \rangle = [\langle \alpha_0^{(n)} | + \lambda \langle \alpha_1^{(n)} | + \dots] [|\alpha_0^{(n)}\rangle + \lambda |\alpha_1^{(n)}\rangle + \dots]$$

$$\approx \langle \alpha_0^{(n)} | \alpha_0^{(n)} \rangle + \lambda [\langle \alpha_0^{(n)} | \alpha_1^{(n)} \rangle + \langle \alpha_1^{(n)} | \alpha_0^{(n)} \rangle] + \dots$$

$$\Rightarrow \langle \alpha_0^{(n)} | \alpha_1^{(n)} \rangle + \langle \alpha_1^{(n)} | \alpha_0^{(n)} \rangle = 0$$

$$(z = -z^*)$$



puramente imaginario

Escojamos $\langle \phi_n | \psi_n(\lambda) \rangle$ real

$$\langle \phi_n | \psi_n(\lambda) \rangle = \langle \alpha_0^{(n)} | \alpha_0^{(n)} \rangle + \lambda \langle \alpha_0^{(n)} | \alpha_1^{(n)} \rangle \in \mathbb{R}$$

Como $\langle \alpha_0^{(n)} | \alpha_1^{(n)} \rangle \in \mathbb{R}$ y $\in \mathbb{I}$ es cero.

Segundo orden

$$(H_0 - E_0^{(n)}) |\alpha_2^{(n)}\rangle + (\hat{W} - E_1^{(n)}) |\alpha_1^{(n)}\rangle - E_2^{(n)} |\alpha_0^{(n)}\rangle = 0$$

multiplicamos por $\langle \phi_n |$

$$\langle \phi_n | H_0 - E_0^{(n)} | \alpha_2^{(n)} \rangle + \langle \phi_n | \hat{W} | \alpha_1^{(n)} \rangle - E_1^{(n)} \langle \phi_n | \alpha_1^{(n)} \rangle - E_2^{(n)} \langle \phi_n | \alpha_0^{(n)} \rangle = 0$$

$$E_2^{(n)} = \langle \phi_n | \hat{W} | \alpha_1^{(n)} \rangle$$

$$|\alpha_1^{(n)}\rangle = \sum_{p \neq n} \frac{\langle \phi_p | W | \phi_n \rangle}{E_n^0 - E_p^{(0)}} |\phi_p\rangle$$

$$E_2^{(n)} = \sum_{p \neq n} \frac{|\langle \phi_p | W | \phi_n \rangle|^2}{E_n^0 - E_p^0}$$

Poner expresión final completa

Ejemplo 2: Oscilador armónico cargado en un campo eléctrico

$$H(\varepsilon) = \underbrace{\frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2}_{H_0} - \underbrace{q\varepsilon X}_W$$

llamaremos $|\varphi_n\rangle$ los e-vectores de H_0

Usando teoría de perturbaciones

$$H(\varepsilon) = \underbrace{\frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2}_{H_0} - \underbrace{q\varepsilon X}_W$$

$$W = -q\varepsilon X = -q\varepsilon \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \hat{X} = \lambda \hbar \omega \hat{X} = \frac{\lambda \hbar \omega}{\sqrt{2}} (a^+ + a)$$

Con e-vectores $|\varphi_n\rangle$ y e-valor $E_n^0 = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$

¿Cómo cambia la energía de estado n a primer orden en T.P.?

$$\begin{aligned} E_n &= E_n^0 + \langle \varphi_n | W | \varphi_n \rangle = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}) + \frac{\lambda \hbar \omega}{\sqrt{2}} \langle \varphi_n | a^+ + a | \varphi_n \rangle \\ &= \hbar\omega(n + \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

No hay corrección a primer orden.

Es necesario calcular 2º orden para obtener una corrección

$$E_n = E_n^0 + \cancel{\langle \varphi_n | W | \varphi_n \rangle} + \sum_{m \neq n} \frac{|\langle \varphi_m | W | \varphi_n \rangle|^2}{E_n^0 - E_m^0}$$

$$\langle \varphi_m | W | \varphi_n \rangle = \frac{\lambda \hbar \omega}{\sqrt{2}} \langle \varphi_m | a^+ + a | \varphi_n \rangle$$

$$\begin{aligned} E_n^0 - E_m^0 &= \hbar\omega(n + \frac{1}{2} - m - \frac{1}{2}) \\ &= \hbar\omega(n - m) \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} &= \frac{\lambda \hbar \omega}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{n+1} \langle \varphi_m | \varphi_{n+1} \rangle + \sqrt{n} \langle \varphi_m | \varphi_{n-1} \rangle \right] \\ &= \frac{\lambda \hbar \omega}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{n+1} \delta_{m,n+1} + \sqrt{n} \delta_{m,n-1} \right] \end{aligned} \right\}$$

A segundo orden

$$E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}) - \frac{\lambda^2 \hbar^2 \omega^2 (n+1)}{2 \hbar\omega} + \frac{\lambda^2 \hbar^2 \omega^2 n}{2 \hbar\omega}$$

$$= \hbar\omega \left[(n + \frac{1}{2}) - \frac{\lambda^2}{2} (n+1) + \frac{\lambda^2}{2} n \right]$$

$$= \hbar\omega \left[(n + \frac{1}{2}) - \frac{\lambda^2}{2} \right] = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}) - \frac{q^2 \mathcal{E}^2}{2m\omega^2}$$

Solución analítica

$$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$$

en la base $\{|x\rangle\}$ $\langle x|H|\psi\rangle = E\langle x|\psi\rangle$

$$\text{con } H(x) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 - q\mathcal{E}x$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 - q\mathcal{E}x \right] \psi(x) = E \psi(x)$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 \left(x^2 - 2 \frac{q\mathcal{E}}{m\omega^2} x \right) \right] \psi(x) = E \psi(x)$$

Completando cuadrado

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 \left(x - \frac{q\mathcal{E}}{m\omega^2} \right)^2 - \frac{q^2 \mathcal{E}^2}{m^2 \omega^4} \frac{1}{2}m\omega^2 \right] \psi(x) = E \psi(x)$$

$$- \frac{q^2 \mathcal{E}^2}{2m\omega^2}$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 \left(x - \frac{q\mathcal{E}}{m\omega^2} \right)^2 \right] \psi(x) = \left[E + \frac{q^2 \mathcal{E}^2}{2m\omega^2} \right] \psi(x)$$

Haciendo cambio de variable $x - \frac{q\mathcal{E}}{m\omega^2} \rightarrow u$

$$\frac{d}{dx} \rightarrow \frac{d}{du} ;$$

$$\tilde{\psi}(u) = \psi(x) = \psi\left(u + \frac{q\mathcal{E}}{m\omega^2}\right)$$

$$\tilde{\psi}(u) = \tilde{\psi}\left(x - \frac{q\mathcal{E}}{m\omega^2}\right)$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{du^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 u^2 \right] \tilde{\psi}(u) = \tilde{E} \tilde{\psi}(u)$$

$\tilde{E} = E + \frac{q^2 \mathcal{E}^2}{2m\omega^2}$

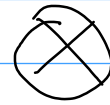
Ecuación del oscilador armónico cuántico

$$\tilde{E}_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}) \Rightarrow E_n = \tilde{E}_n - \frac{q^2 \mathcal{E}^2}{2m\omega^2} = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}) - \frac{q^2 \mathcal{E}^2}{2m\omega^2}$$

Producto tensorial

Producto tensorial.

(producto de Kronecker)



- Si tenemos dos sistemas aislados S_1 y S_2 . ¿Cómo describir al sistema completo?
- ¿Cómo relacionar los espacios de estados en problemas de 1D y 3D?

- Definición:

Si $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ son espacios de Hilbert de dim N_1 y N_2 (finita o infinita).

El producto tensorial de los espacios:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 \quad (\dim \mathcal{E} = N_1 \times N_2)$$

Si $|\varphi\rangle \in \mathcal{E}_1$ y $|\psi\rangle \in \mathcal{E}_2$

El producto tensorial de los vectores

$$|\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle \in \mathcal{E} \\ = |\varphi\psi\rangle$$

Con las siguientes propiedades:

iii) Si $\{|u_i\rangle\}$ es base de E_1 ($\dim N_1$)
 $\{|v_j\rangle\}$ es base de E_2 ($\dim N_2$)
 $\{|u_i\rangle \otimes |v_j\rangle\}$ es base de E

$$\dim E = N_1 N_2$$

Con $|\varphi\rangle \in E_1$ y $|\psi\rangle \in E_2$ arbitrarios

$$|\varphi\rangle = \sum_i a_i |u_i\rangle \quad ; \quad |\psi\rangle = \sum_j b_j |v_j\rangle$$

$$|\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle = \sum_{ij} a_i b_j |u_i\rangle \otimes |v_j\rangle$$

Nota importante:

$\exists$ vectores en E que no se pueden escribir como producto tensorial de vectores en E_1 y E_2 .

Ejemplo Para dos espines $\left\{ \begin{aligned} |\uparrow\rangle &= |s=\frac{1}{2}, m_s=\frac{1}{2}\rangle \\ |\downarrow\rangle &= |s=\frac{1}{2}, m_s=-\frac{1}{2}\rangle \end{aligned} \right\}$

$|\uparrow\downarrow\rangle$: espín 1 en estado $|\uparrow\rangle$ y espín 2 en $|\downarrow\rangle$.

$$|\psi\rangle = \frac{|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle}{\sqrt{2}}$$

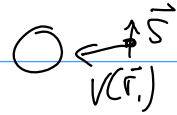
no se puede escribir como $|u\rangle \otimes |v\rangle$.
 pero

Enredamiento cuántico:

Un estado enredado es un estado cuántico multipartita (con más de una parte) que no se puede escribir como $|u\rangle \otimes |v\rangle$.

Suma de momentos angulares cuánticos.

Motivación $\vec{J}_{total}$ es cte de mov.  1.

Consideramos 2 m.a. $\vec{J}_1$ y $\vec{J}_2$  2.

Espacio de estados:

Para $\vec{J}_1$: $|j_1, m_1\rangle$; Para $\vec{J}_2$: $|j_2, m_2\rangle$

Para el sistema compuesto $\{|j_1, m_1, j_2, m_2\rangle\}$

$|j_1, m_1, j_2, m_2\rangle$ es un e-vector de J_1^2, J_{1z}, J_2^2 y J_{2z}

Definimos el producto tensorial

de A y B como

$$(A \otimes B)(|\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle) = (A|\psi\rangle) \otimes (B|\varphi\rangle)$$

$$(A \otimes \mathbb{1}_2)(|\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle) = (A|\psi\rangle) \otimes (\mathbb{1}_2|\varphi\rangle) = (A|\psi\rangle) \otimes |\varphi\rangle$$

$$J_1^2 |j_1, m_1, j_2, m_2\rangle = \hbar^2 j_1(j_1+1) |j_1, m_1, j_2, m_2\rangle$$

$$J_{1z} \otimes \mathbb{1}_2 \rightarrow J_{1z} |j_1, m_1, j_2, m_2\rangle = \hbar m_1 |j_1, m_1, j_2, m_2\rangle$$

$$J_2^2 |j_1, m_1, j_2, m_2\rangle = \hbar^2 j_2(j_2+1) |j_1, m_1, j_2, m_2\rangle$$

$$\mathbb{1}_1 \otimes J_{2z} \rightarrow J_{2z} |j_1, m_1, j_2, m_2\rangle = \hbar m_2 |j_1, m_1, j_2, m_2\rangle$$

$\{J_1^2, J_{1z}, J_2^2, J_{2z}\}$ es un CLOC en $E = E_{j_1} \otimes E_{j_2}$

Definimos $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2 = \vec{J}_1 \otimes \mathbb{1}_2 + \mathbb{1}_1 \otimes \vec{J}_2$

$$(J_x, J_y, J_z) = (J_{1x} + J_{2x}, J_{1y} + J_{2y}, J_{1z} + J_{2z})$$